Información Tecnológica
Vol. 33(3), 43-50 (2022)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642022000300043

Cuadraturas de Gauss-Legendre para resolver numéricamente la ecuación inversa de la cinética puntual

Daniel Suescún-Díaz, Jesús A. Chala-Casanova y Rosemberg Gómez-Noguera
Departamento de Ciencias Naturales, Universidad Surcolombiana, Neiva, Huila, Colombia (correo-e: daniel.suescun@usco.edu.co, chalarock@gmail.com, rosembergomez123@gmail.com)

Recibido Sep. 27, 2021; Aceptado Nov. 25, 2021; Versión final Dic. 12, 2021, Publicado Jun. 2022

Resumen

En este estudio se presenta un nuevo método para el cálculo de la reactividad usando la cuadratura Gauss-Legendre para resolver numéricamente la ecuación inversa de la cinética puntual. Esta cuadratura puede usar diferentes nodos y pesos encontrados a partir de los polinomios de Legendre con diferentes órdenes. Una buena precisión es obtenida para mayores órdenes del polinomio con pequeños pasos de tiempo. La discretización obtenida con la cuadratura de Gauss-Legendre permite expresar el cálculo de la reactividad en forma de convoluciones lineales para la dependencia integral. La parte diferencial es aproximada con una cuadratura especial, aprovechando el comportamiento de los polinomios de Lagrange. Es posible obtener mejores resultados, aunque aumentando el costo computacional. Se concluye que el método puede ser implementado en un medidor digital de reactividad que tome la densidad de la población de neutrones como señales de entrada en un reactor nuclear.

Palabras clave: ecuación inversa; cinética puntual; cuadratura Gauss-Legendre; reactividad nuclear; simulación numérica; reactor nuclear

Gauss-Legendre quadrature for numerical solution of the inverse point kinetic equation

Abstract

The present study develops a new method for calculating reactivity by using the Gauss-Legendre quadrature to numerically solve the inverse point kinetic equation. This quadrature can use different nodes and weights from Legendre polynomials with different orders. The results show good accuracy for polynomial higher orders with small time steps. The discretization obtained with the Gauss-Legendre quadrature allows expressing the reactivity calculation in the form of linear convolutions for integral dependence. The differential is approximated with a special quadrature by taking advantage of the behavior of the Lagrange polynomials. Results can be improved, but increases computational cost. It is concluded that the method developed here can be implemented in a reactivity digital meter that measures neutron populations as input signals for a nuclear reactor.

Keywords: inverse equation; point kinetic; Gauss-Legendre quadrature; nuclear reactivity; numerical simulation; nuclear reactor

INTRODUCCIÓN

La obtención de electricidad proveniente de los núcleos se fundamenta en la reacción de fisión, neutrones térmicos son bombardeados hacia átomos pesados, como el U-235. La reacción debe mantenerse en forma segura mediante un reactor nuclear, principalmente por el movimiento de las barras de control (Stacey, 2018). Este movimiento permite variar la producción de los neutrones, cambiando el factor de multiplicación y por lo tanto el valor de la reactividad, el parámetro quizás más importante para el control del reactor nuclear. Los métodos numéricos son frecuentemente usados para simulaciones en el comportamiento térmico (Ortega et al., 2009), la propagación de una fisura (Palma et al., 2010) y, en el efecto de la presión metano-oxígeno (De la Cruz et al., 2015).

En física de reactores nucleares existen diferentes métodos para el cálculo de la reactividad usando el filtro pasa bajo (Shimazu et al., 1987), métodos estadísticos (Hoogenboom y Van der Sluijs, 1988), aproximaciones lineales (Binney y Bakir, 1989; Ansari, 1991), diferencias finitas (Tamura, 2003), por medio de los polinomios de Lagrange de tres y cinco puntos (Malmir y Vosoughi, 2013) y un método usando la generalización de los números de Bernoulli (Suescún-Díaz et al., 2020). En este trabajo se presenta un método alternativo que permita calcular la reactividad con buena precisión usando la ecuación inversa de la cinética puntual con diferentes nodos que implicaría diferentes órdenes de polinomios, aumentando la precisión con un mayor orden del polinomio para diferentes formas de la densidad de la población de neutrones.

Las ecuaciones de la cinética puntual son en general no lineales y fuertemente acopladas que describen la evolución temporal de la densidad de la población de neutrones y la concentración de precursores de neutrones atrasados (Stacey, 2018),

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t)-\beta}{\Lambda}\right] N(t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i \tag{1}$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} N(t) - \lambda_i C_i \qquad \text{i=1,2,…,} m \tag{2}$$

Sujeto a las condiciones iniciales,

$$N(t=0) = N_0 \tag{3}$$

$$C_i(t=0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} N_0 \tag{4}$$

Dónde *N(t)* es la densidad de la población de neutrones, *ρ(t)* la reactividad, $C_i(t)$ la concentración de precursores del i-ésimo grupo de neutrones atrasados, *Λ* el tiempo de generación de neutrones instantáneos, *β* es la fracción total de neutrones atrasados, βi la i-ésima fracción de neutrones atrasados y *λi* la constante de decaimiento del i-ésimo grupo de precursores. Con las ecuaciones (1-4) es posible obtener la ecuación inversa de la cinética puntual (Stacey, 2018):

$$\rho(\mathrm{t}) = \beta + \frac{\Lambda}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} - \frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \left[\frac{N_0}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i (t-t')} N(t') dt'\right] \tag{5}$$

La ecuación (5) es del tipo integro-diferencial y depende de la densidad de la población de neutrones, es la base para la construcción de medidores de reactividad para elevar la seguridad en un reactor nuclear, en las pruebas de inicio y apagado de un reactor.

METODOLOGÍA

En este trabajo la metodología se plantea en dos subsecciones: un esquema de integración numérica que estime el valor de la integral y un esquema diferencial regresivo que solucione numéricamente el término de la derivada.

Cuadratura de integración de Gauss-Legendre

Esta cuadratura es útil debido a su gran precisión (Mathews y Fink, 2004), son utilizadas en las secciones transversales (Chen et al., 2019), para modelar los efectos gravitacionales (Asgharzadeh et al., 2017) y se

utilizan para la solución aproximada de ecuaciones de Fredholm-Volterra (Dehestani et al., 2021). En general, se utiliza para estimar la integral de una función en el intervalo [a, b] (Hildebrand, 1987),

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) + E\{f\} \tag{6}$$

Los *n* puntos distintos x_j para los valores comprendidos entre $1 \leq j \leq n$, se les denomina nodos, los w_j se les llaman pesos. La integral de una función *f(x)* definida en el intervalo [-1,1] se puede calcular de la siguiente forma,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) + E_n\{f\} \tag{7}$$

Dónde los x_n son ceros del polinomio de grado *n* de Legendre $P_n(x)$, (Stoer y Bulirsch, 2011),

$$P_n(x_j) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x_j^2 - 1)^n = 0 \tag{8}$$

Los pesos w_j quedan dados por (Hildebrand, 1987),

$$w_j = \frac{2(1 - x_j^2)}{(n+1)^2\left[P_{n+1}(x_j)\right]^2} \tag{9}$$

Existen distintos algoritmos para obtener los valores x_j, uno es Newton-Raphson (Hale y Townsend, 2013) y otro es usando una expansión en serie para el cálculo de los nodos de la cuadratura (Bogaert, 2014). El término del error de la ecuación (8) es dado (Isaacson y Keller, 1996),

$$E_n\{f\} = \frac{2}{(2n+1)!}\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 f^{(2n)}(\xi), \qquad -1 < \xi < 1 \tag{10}$$

Usando la sustitución *t'=((b-a)x+a+b)/2;* es posible aproximar la integral de una función *f(t')* definida en un intervalo general [a, b] al trasladar el problema al dominio [-1,1] y después usando la cuadratura de Gauss-Legendre dada por la ecuación (7), así es posible obtener:

$$\int_a^b f(t')dt' = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]\right)\frac{b-a}{2}dx = \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} w_j f\left(\frac{1}{2}\left[x_j(b-a) + a + b\right]\right) + E_n\{f\} \tag{11}$$

Para construir una regla compuesta se expresa la integral como la suma de múltiples integrales,

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^{\Delta t} f(x)dx + \ldots + \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} f(x)dx + \ldots + \int_{(z-1)\Delta t}^{z\Delta t} f(x)dx = \sum_{k=0}^{z-1}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(x)dx \tag{12}$$

Donde $t_k = k\Delta t$, sustituyendo $a = t_k$, $b = t_k + \Delta t$ y considerando la variable muda $x = t'$ en la ecuación (11), se integra cada segmento de la ecuación (12) mediante la cuadratura de Gauss-Legendre, obteniendo:

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(x)dx = \frac{\Delta t}{2}\sum_{j=1}^{n} w_j f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}(x_j + 1)\right) + \frac{\Delta t^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \tag{13}$$

Es posible calcular la integral de la ecuación (5) usando la cuadratura compuesta de Gauss-Legendre dada de la siguiente forma,

$$\int_0^t f(x)dx = \sum_{k=0}^{z-1}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(x)dx \approx \frac{\Delta t}{2}\sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=1}^{n} w_j f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}(x_j + 1)\right) \tag{14}$$

Sustituyendo el integrando de la ecuación (5) en la ecuación (14) se obtiene,

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^{t_z} e^{-\lambda_i(t_z-x)}N(x)dx \approx \frac{\Delta t}{2}\sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=1}^{n} w_j e^{-\lambda_i\left(t_z-\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}(x_j+1)\right)\right)}N\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}(x_j+1)\right) \tag{15}$$

El cálculo de la reactividad se puede reescribir en forma discreta por medio de la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}\rho(t_z) = \beta + \frac{\Lambda}{N(t_z)}\frac{dN(t_z)}{dt} - \frac{N_0}{N(t_z)}\sum_{i=1}^{m}\beta_i e^{-\lambda_i t_z} \\ -\frac{\Delta t}{2N(t_z)}\sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\beta_i w_j e^{-\lambda_i\left[t_z-\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}(x_j+1)\right)\right]}N\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}(x_j+1)\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Las tres sumas en la ecuación (16) se pueden reescribir considerando inicialmente un cambio de variables y un polinomio de grado n; el tiempo t_z donde se evalúa la reactividad $\rho(t_z)$ resulta ser,

$$t_{(n+1)z} = z\Delta t, \qquad z = 1,2,3,\ldots \tag{17}$$

Las subdivisiones en el tiempo t_k quedan dadas por

$$t_{(n+1)k} = k\Delta t, \qquad 0 \le k < z \tag{18}$$

Los puntos intermedios $t_{(n+1)k+j}$ están dados en función de los nodos x_j son:

$$t_{(n+1)k+j} = t_k + \frac{\Delta t}{2}(x_j+1), \qquad 1 \le j \le n \tag{19}$$

Considerando las ecuaciones (17-19), se reescribe la ecuación (16) de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\rho(t_{(n+1)z}) = \beta + \frac{\Lambda}{N(t_{(n+1)z})}\frac{d}{dt}N(t_{(n+1)z}) - \frac{N_0}{N(t_{(n+1)z})}\sum_{i=1}^{m}\beta_i e^{-\lambda_i t_{(n+1)z}} \\ -\frac{\Delta t}{2P(t_{(n+1)z})}\sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\omega_j\lambda_i\beta_i e^{-\lambda_i(t_{(n+1)z}-t_{(n+1)k+j})}N(t_{(n+1)k+j})\end{aligned} \tag{20}$$

Se puede simplificar utilizando,

$$h(t_k) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i e^{-\lambda_i t_k} & si \quad t_k \ge 0 \\ 0 & si \quad t_k < 0\end{cases} \tag{21}$$

Utilizando la ecuación (21) es posible ignorar temporalmente la sumatoria sobre los grupos de precursores, se define entonces la cantidad $I_{(n+1)z}$

$$I_{(n+1)z} = \sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=1}^{n} w_j h\left(t_{(n+1)z} - t_{(n+1)k+j}\right)N\left(t_{(n+1)k+j}\right) \tag{22}$$

Realizando la sustitución s=(n+1)k+j en la ecuación (22) es posible obtener,

$$I_{(n+1)z} = \sum_{k=0}^{z-1}\sum_{j=0}^{n} w_j h\left(t_{(n+1)z} - t_s\right)N(t_s) = \sum_{s=0}^{(n+1)z} H\left(t_{(n+1)z} - t_s\right)N(t_s) \tag{23}$$

Dónde $H(t_s)$ está dado por,

$$H(t_s) = H\left(t_{(n+1)k+j}\right) = w_j\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\beta_i e^{-\lambda_i t_{(n+1)k+j}} \tag{24}$$

Sustituyendo la ecuación (23) en la ecuación (20) se obtiene,

$$\rho\left(t_{(n+1)z}\right) = \beta + \frac{\Lambda}{N\left(t_{(n+1)z}\right)}\frac{d}{dt}N\left(t_{(n+1)z}\right) - \frac{N_0}{N\left(t_{(n+1)z}\right)}\sum_{i=1}^{m}\beta_i e^{-\lambda_i t_{(n+1)z}} - \frac{\Delta t}{2P(t_{(n+1)z})}\sum_{s=0}^{(n+1)z} H\left(t_{(n+1)z} - t_s\right)N(t_s) \tag{25}$$

La triple sumatoria en la ecuación (20) resulta ser un producto de convolución análogo al filtro FIR, (Haykin, 2014), con una diferencia debido a los pesos w_j que incorpora la cuadratura de integración. La convolución dada en la ecuación (25) se puede interpretar como el producto entre la respuesta al impulso H*(t)* y la densidad de la población de neutrones *N(t)*, denotado por,

$$I_s = (H * N)[s] = \sum_{s=0}^{z} H(t_z - t_s)N(t_s) \tag{26}$$

Esquema diferencial regresivo

Debido al término que contiene la derivada en la ecuación (5), el cálculo de la reactividad puede representar una dificultad, en algunos trabajos es ignorada (Shimazu et al., 1987), en otros se limitan a considerar únicamente la solución analítica (Malmir y Vosoughi, 2013). En este trabajo se propone calcular este término por medio de una cuadratura o esquema diferencial interpolando N(t) por medio de un polinomio de Lagrange de la forma,

$$N(t_z) \simeq P_{n+1}(t_z) = \sum_{q=0}^{n+1} N\left(t_q\right)\prod_{\substack{p=0\\p\neq q}}^{n+1}\frac{t - t_p}{t_q - t_p} \tag{27}$$

Es posible calcular la derivada contenida en la ecuación inversa de la cinética puntual derivando la ecuación (27) obteniendo,

$$\frac{d}{dt}N(t_z) \simeq \sum_{q=0}^{n+1} N\left(t_q\right)\frac{d}{dt}\left(\prod_{\substack{p=0\\p\neq q}}^{n+1}\frac{t - t_p}{t_q - t_p}\right) \tag{28}$$

La derivada puede ser calculada en distintos puntos, se evalúa en el instante $t_{(n+1)}$ lo que permite estimar el valor de la derivada haciendo uso únicamente de datos previos.

$$\frac{d}{dt}N(t_{n+1}) \simeq \sum_{q=0}^{n+1} N\left(t_q\right)\frac{d}{dt}\left(\prod_{\substack{p=0\\p\neq q}}^{n+1}\frac{t - t_p}{t_q - t_p}\right)_{t=t_{n+1}} \tag{29}$$

Ahora, la discretización en el tiempo dada por las ecuaciones (17-19) con *z=1* y *n=2* generan los siguientes valores para los cuatro primeros instantes de tiempo,

$$t_0 = 0,\ t_1 = t_0 + \frac{\Delta t}{2}(x_1 + 1),\ t_2 = t_0 + \frac{\Delta t}{2}(x_2 + 1),\ t_3 = t_0 + \Delta t \tag{30}$$

Los instantes del tiempo dadas según las expresiones en la ecuación (30), se usan para calcular los diferentes términos en la ecuación (29). Después de derivar cada término y su correspondiente evaluación se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt}N(t_3) \simeq -\frac{N(t_0)}{\Delta t} + \frac{2N(t_1)}{\Delta t(1 + x_2)x_2} - \frac{2N(t_2)}{\Delta t(1 - x_2)x_2} + N(t_3)\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta t(1 - x_2)} + \frac{2}{\Delta t(1 + x_2)}\right) \tag{31}$$

Usando el valor para el nodo $x_2 = (3)^{-1/2}$ para *n=2*, sustituyendo en la ecuación (31), se obtiene entonces la siguiente expresión,

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}N(t_3)=\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\left[7N(t_3)-3\left(\sqrt{3}+1\right)N(t_2)+3\left(\sqrt{3}-1\right)N(t_1)-N(t_0)\right] \quad (32)$$

Para el número de nodos *n=2*, los pesos de la cuadratura diferencial son $\alpha_q = \{7, -3(3^{1/2}+1), 3(3^{1/2}-1), -1\}$. El esquema regresivo obtenido se puede expresar como,

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}N(t_z)=\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\sum_{q=0}^{n+1}\alpha_q N\left(t_{z-q}\right) \quad (33)$$

Para generar cuadraturas de diferenciación de mayor precisión se expande la ecuación (29) con n=3 y n=4. Sustituyendo la ecuación (33) en la ecuación (25) se obtiene finalmente,

$$\rho(t_z)=\beta+\frac{\Lambda}{N(t_z)}\frac{1}{\Delta t}\sum_{q=0}^{n+1}\alpha_q\, N(t_{z-q})-\frac{N_0}{N(t_z)}\sum_{i=1}^{m}\beta_i e^{-\lambda_i t_z}-\frac{\Delta t}{2N(t_z)}\sum_{s=0}^{z}H(t_z-t_s)\,N(t_s) \quad (34)$$

Dónde *z=(n+1)z', z'=1,2,3,…;* la ecuación (34) permite calcular la reactividad en forma discreta equivalente a la ecuación continúa dada por la ecuación (5), la derivada se resuelve por medio de la cuadratura diferencial con nodos de Gauss-Legendre dada por la ecuación (32) mientras que el término asociado a la integral se resuelve por medio de una convolución entre la respuesta al impulso y la densidad de la población de neutrones dada por la ecuación (23) construida a partir de cuadraturas de Gauss-Legendre.

RESULTADOS

La ecuación inversa de la cinética puntual dada por la ecuación (5) tiene solución analítica para diferentes formas de la densidad de población de neutrones, en este trabajo se toma como el método de referencia para validar el método propuesto dado por la ecuación (34). La diferencia máxima entre el método propuesto y el método de referencia se define como máx($|\rho_A-\rho_{GL}|$) dónde, ρ_A es la solución analítica y ρ_{GL} es la solución numérica utilizando el método propuesto para distintas formas de la densidad de la población de neutrones n(t) en un intervalo de tiempo máximo dado por $t_{máx}$. Se realizan simulaciones numéricas para un reactor nuclear térmico con los parámetros: β_i = {0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.000896, 0.000182}, la fracción total efectiva $\beta = \Sigma\beta_i = 0.007$, las constantes de decaimiento λ_i = {0.0127, 0.0317, 0.115, 0.311, 1.4, 3.87} s^{-1} y el tiempo de generación del neutrón $\Lambda = 2\times10^{-5}$ *s*. Los resultados utilizan doble precisión (DP) y cuádruple precisión (QP indicados con el super índice *).

El primer experimento numérico considera la densidad de la población de neutrones de la forma *N(t)=exp(ωt),* para distintos intervalos de tiempo de simulación $t_{máx}$, los valores *ω* se obtiene a partir de las raíces positivas de la *ecuación en horas* (Kinard y Allen, 2004). El método propuesto se representa como GL-2, GL-3 y GL-4 para nodos *n=2, n=3 y n=4* respectivamente. En la Tabla 1 se encuentra que el método propuesto no tiene una diferencia notable al considerar DP o QP para un paso de tiempo Δt=0.1s para resolver el método propuesto con cuadraturas GL-2 y GL-3, sin embargo, para GL-4 se empieza a notar una leve disminución en la máxima diferencia, comparable al reciente método usando los infinitos números de Bernoulli (*MGNB*).

Tabla 1: Máximas diferencias en la reactividad para la forma *N(t) = exp(ωt)* con Δt=0.1s

ω (s^{-1})	*Máxima Diferencia en Reactividad (pcm)*					
	$t_{máx}$	*GL-2*	*GL-3*	*GL-4*	*GL-4**	*MGNB*
0.00243	1000s	1.02×10^{-4}	3.06×10^{-8}	6.51×10^{-12}	5.15×10^{-12}	1.55×10^{-12}
0.01046	1000s	1.03×10^{-4}	3.09×10^{-8}	6.68×10^{-12}	5.23×10^{-12}	3.75×10^{-12}
0.02817	1000s	1.05×10^{-4}	3.17×10^{-8}	8.92×10^{-12}	5.40×10^{-12}	2.19×10^{-12}
0.12353	300s	1.14×10^{-4}	3.58×10^{-8}	1.20×10^{-11}	6.39×10^{-12}	1.88×10^{-12}
1.00847	100s	2.20×10^{-4}	4.53×10^{-8}	3.90×10^{-10}	3.90×10^{-10}	3.41×10^{-13}

La Tabla 2 permite confirmar que cuando se usa mayor número de cifras significativas y se quiere tener mejor precisión, se deben usar cuadraturas de tres y cuatro nodos (GL-3 y GL-4) considerando paso de tiempo de

cálculo menores o iguales a Δt =0.01 s. Con diferencias de hasta 10 órdenes de magnitud. En general para este tipo de experimentos el método tiene una precisión que depende del paso de tiempo y del orden de la cuadratura.

Tabla 2: Máximas diferencias en la reactividad para la forma *N(t) = exp(ωt)* con Δt=0.01s.

ω (s^{-1})	*Máxima Diferencia en Reactividad (pcm)*						
	$t_{máx}$	*GL-2*	*GL-3*	*GL-3**	*GL-4*	*GL-4**	*MGNB*
0.00243	1000s	1.03×10^{-8}	4.77×10^{-12}	3.08×10^{-14}	8.61×10^{-11}	5.18×10^{-20}	7.50×10^{-11}
0.01046	1000s	1.04×10^{-8}	9.61×10^{-11}	2.84×10^{-14}	1.53×10^{-10}	5.25×10^{-20}	3.44×10^{-12}
0.02817	1000s	1.05×10^{-8}	1.55×10^{-11}	3.18×10^{-14}	4.69×10^{-10}	5.43×10^{-20}	3.13×10^{-12}
0.12353	300s	1.14×10^{-8}	2.93×10^{-11}	3.57×10^{-14}	4.45×10^{-11}	5.02×10^{-20}	6.33×10^{-12}
1.00847	100s	1.33×10^{-8}	7.03×10^{-11}	8.68×10^{-12}	9.81×10^{-11}	4.16×10^{-15}	3.98×10^{-13}

Los siguientes experimentos numéricos se realizan para diferentes formas de la densidad de la población de neutrones, los resultados de las máximas diferencias en el cálculo de la reactividad usando los parámetros a=1, $b=3.67\times10^{-11}$, ω=0.12353 y un tiempo máximo de simulación $t_{máx}$ = 300s, se registran en las Tablas 3-4. Los resultados en la Tabla 3 indican que no es necesario considerar más de 16 cifras significativas para GL-2, se muestra que el método conserva su precisión independiente de la forma de la densidad de la población de neutrones y depende únicamente del orden de la cuadratura y el paso de tiempo. Una variación de hasta dos órdenes de magnitud es notoria en GL-3 cuando el paso de tiempo es de Δt=0.01 s como indicado en la Tabla 3 y se evidencia más cuando se usa la cuadratura GL-4 donde para pasos de tiempo bajos la máxima diferencia se reduce hasta ocho ordenes de magnitud, comportamiento presentado en la Tabla 4. Los diferentes resultados obtenidos con el método propuesto indican que es posible obtener mejores precisiones considerando cuadraturas de 4 nodos GL-4 cuando el paso de tiempo es 0.01s con QP.

Tabla 3: Máximas diferencias en la reactividad usando GL-3.

N(t)	Δt=0.1	Δt=0.05	Δt=0.01	Δt=0.01*
$a + \omega\ t_k$	5.46×10^{-8}	5.42×10^{-10}	3.82×10^{-12}	3.47×10^{-14}
$a + \omega\ t_k^2$	4.75×10^{-8}	7.49×10^{-10}	5.27×10^{-12}	4.78×10^{-14}
$a + b\ sin(\omega t_k)$	3.05×10^{-8}	4.80×10^{-10}	3.99×10^{-12}	3.07×10^{-14}
$a + b\ cos(\omega t_k)$	3.05×10^{-8}	4.80×10^{-10}	4.42×10^{-12}	3.07×10^{-14}
$a + b\ sinh(\omega t_k)$	3.58×10^{-8}	5.65×10^{-10}	4.08×10^{-12}	3.58×10^{-14}
$a + b\ cosh(\omega t_k)$	3.58×10^{-8}	5.65×10^{-10}	4.16×10^{-12}	3.58×10^{-14}

Tabla 4: Máximas diferencias en la reactividad usando GL-4.

N(t)	Δt=0.1	Δt=0.1*	Δt=0.05	Δt=0.05*	Δt=0.01	Δt=0.01*
$a + \omega\ t_k$	6.25×10^{-12}	6.08×10^{-12}	2.00×10^{-12}	2.38×10^{-14}	4.60×10^{-12}	6.11×10^{-20}
$a + \omega\ t_k^2$	1.35×10^{-11}	9.40×10^{-12}	4.43×10^{-12}	3.69×10^{-12}	5.19×10^{-12}	9.46×10^{-20}
$a + b\ sin(\omega t_k)$	6.25×10^{-12}	5.13×10^{-12}	2.26×10^{-12}	2.01×10^{-14}	9.29×10^{-12}	5.15×10^{-20}
$a + b\ cos(\omega t_k)$	6.51×10^{-12}	5.13×10^{-12}	1.82×10^{-12}	2.01×10^{-14}	5.20×10^{-12}	5.16×10^{-20}
$a + b\ sinh(\omega t_k)$	8.36×10^{-12}	6.39×10^{-12}	3.47×10^{-12}	2.50×10^{-14}	4.60×10^{-12}	5.15×10^{-20}
$a + b\ cosh(\omega t_k)$	8.36×10^{-12}	6.39×10^{-12}	3.47×10^{-12}	2.50×10^{-14}	4.60×10^{-12}	5.16×10^{-20}

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método alternativo para el cálculo de la reactividad resolviendo numéricamente la ecuación inversa de la cinética puntual por medio de cuadraturas de Gauss-Legendre, se dedujeron dos tipos de cuadraturas una diferencial y otra integral de distintos ordenes GL-2, GL-3 y GL-4. La cuadratura se expresa por medio de una convolución y la cuadratura diferencial en un esquema de derivación regresiva de alta precisión. El método puede ser implementado en un medidor digital de reactividad que tome densidad de la población de neutrones como señales de entrada en un reactor nuclear. La precisión del método no depende de la forma de la densidad de la población de neutrones sino del paso de tiempo, sin embargo, es posible aumentar la precisión del método sin reducir el paso de tiempo aumentando el orden de las cuadraturas sin elevar el costo computacional. El método tuvo resultados que garantizan hasta 20 cifras significativas para algunos experimentos.

REFERENCIAS

Ansari, S. A., Development of On-Line Reactivity Meter for Nuclear Reactors, https://doi.org/10.1109/23.83857, IEEE Trans. Nucl. Sci., 38(4), 946–952 (1991)

Asgharzadeh, M. F., Hashemi, H., y Von Frese, R.R.B., Comprehensive Gravitational Modeling of the Vertical Cylindrical Prism by Gauss–Legendre Quadrature Integration, https://doi.org/10.1093/gji/ggx413, Geophys. J. Int., 212(1), 591–611 (2017)

Binney, S. E., y Bakir, A. J., Design and Development of a Personal-Computer-Based Reactivity Meter for a Research Reactor, https://doi.org/10.13182/nt89-a34223, Nucl. Technol., 85(1), 12–21 (1989)

Bogaert, I., Iteration-Free Computation of Gauss-Legendre Quadrature Nodes and Weights, https://doi.org/10.1137/140954969, SIAM J. Sci. Comput., 36(3), 1008-1026 (2014)

Chen, S., Bernard, D., y otros 5 autores, Calculation and Verification of Neutron Irradiation Damage with Differential Cross Sections, https://doi.org/10.1016/j.nimb.2019.07.011, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B, 456, 120–132 (2019)

De la Cruz, M., Polupan, G., Martínez, E., y Carvajal, I., Estudio Numérico del Efecto de la Presión en el Proceso de Mezcla Metano-Oxígeno en un Arreglo de Chorros 4-Lug Bolt, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642015000200018, Información Tecnológica, 26(2), 153-162 (2015)

Dehestani, H., Ordokhani, Y., y Razzaghi, M., Combination of Lucas Wavelets with Legendre-Gauss Quadrature for Fractional Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations, https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113070, J. Comput. Appl. Math., 382, 113070 (2021)

Hale, N., y Townsend, A., Fast and Accurate Computation of Gauss-Legendre and Gauss-Jacobi Quadrature Nodes and Weights, https://doi.org/10.1137/120889873, SIAM J. Sci. Comput., 35(2) (2013)

Haykin, S. S., Adaptive Filter Theory, Pearson, ISBN: 978-0-273-76408-3, Nueva York, Estados Unidos (2014)

Hildebrand, F. B., Introduction to Numerical Analysis, Dover Pub., Nueva York, Estados Unidos (1987)

Hoogenboom, J. E., y Van der Sluijs, A. R., Neutron Source Strength Determination for On-Line Reactivity Measurements, https://doi.org/10.1016/0306-4549(88)90059-x, Ann. Nucl. Energy., 15(12), 553–559 (1988)

Isaacson, E., y Keller, H. B., Analysis of Numerical Methods, Dover Pub., New York, Estados Unidos (1996)

Kinard, M., y Allen, E. J., Efficient Numerical Solution of the Point Kinetics Equations in Nuclear Reactor Dynamics, https://doi.org/10.1016/j.anucene.2003.12.008, Ann. Nucl. Energy, 31(9), 1039–1051 (2004)

Malmir, H., y Vosoughi, N., On-line Reactivity Calculation Using Lagrange method, https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.07.006, Ann. Nucl. Energy, 62, 463–467 (2013)

Mathews, J. H., y Fink, K. D., Numerical Methods Using Matlab, 4ª Ed., Pearson Prentice Hall, ISBN: 0-13-065248-2, Nueva Jersey, Estados Unidos (2004)

Ortega, A.J., Pires, L.F.G., y Nieckele, A.O., Una Alternativa para la Simulación Numérica del Comportamiento Térmico en Régimen Transitorio de Flujo de Gas en Redes de Ductos, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642009000500011, Inf. Tecnol., 20(5), 83-88 (2009)

Palma, J.A., Barbosa, J.M.A., y Silva, A.A., Simulación Numérica de la Propagación de una Fisura en un Material Degradado por Efecto de la Fragilización por Hidrógeno, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642010000200009, Inf. Tecnol., 21(2), 65-76 (2010)

Sauer, T., Numerical Analysis, 3ª Ed., Pearson, ISBN: 978-0-13-469645-4, Virginia, Estados Unidos (2018)

Shimazu, Y., Nakano, Y., Tahara, Y., y Okayama, T., Development of a Compact Digital Reactivity Meter and a Reactor Physics Data Processor, https://doi.org/10.13182/nt87-a33964, Nucl. Technol., 77(3), 247-254 (1987)

Stacey, W.M., Nuclear Reactor Physics, Wiley-VCH, Weinheim, Alemania (2018)

Stoer, J., y Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer, Nueva York (2011)

Suescún-Díaz, D., Ule-Duque, G., y Escobar, F. H., Novel Approach to Solving the Inverse Equation of Point Kinetics by the Bernoulli Number Generalisation Method, https://doi.org/10.1080/00223131.2020.1742813, J. Nucl. Sci. Technol., 57(8), 989–999 (2020)

Tamura, S., Signal Fluctuation and Neutron Source in Inverse Kinetics Method for Reactivity Measurement in the Sub-critical Domain, https://doi.org/10.1080/18811248.2003.9715345, J. Nucl. Sci. Technol., 40(3), 153–157 (2003)