BAB 1
PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang penelitian, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari mendorong manusia untuk menemukan solusi penyelesaian sehingga timbul perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Manusia biasanya menggunakan ilmu matematika dalam menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Salah satu konsep dalam ilmu ini adalah teori graf. Graf dapat digunakan untuk merepresentasikan masalah yang rumit ke dalam bentuk penyajian yang lebih sederhana sehingga mudah dipahami juga dianalisis dalam perolehan penyelesaian atau solusinya. Graf memiliki berbagai manfaat dalam kehidupan sehari-hari yang sering kali tidak terlihat secara langsung tetapi mempengaruhi banyak aspek kehidupan kita seperti memodelkan jaringan media social seperti *facebook, Instagram,* dan lain-lain, perencanaan rute dan jaringan transportasi, dalam pencarian *search engines*, serta masih banyak lagi. Dengan demikian, graf tidak hanya relevan dalam konteks matematis dan komputasi, tetapi juga memiliki aplikasi yang luas dalam pemecahan masalah dunia nyata dan pnegambilan Keputusan di berbagai bidang kehidupan.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler pada tahun 1736. Dalam matematika, penggunakaan teori graf masih kurang karena banyak dipakai dalam penyelesaian teka-teki (*puzzle*). Pada abad 19 tepatnya tahun 1852, Francis memperkenalkan dan mengkaji graf empat warna. Pada abad ke 20 penelitian tentang teori graf mempunyai banyak topic yang dikaji dan diterapkan dalam berbagai bidang ilmu lainnya. (Hasmawati, 2020)

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf yang semakin berkembang. Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik atau sisi dari suatu graf ke suatu himpunan bilangan (umumnya himpunan bilangan bulat positif atau non negatif) yang diperkenalkan oleh Sedl$\acute{a}\check{c}$ek (1963). Pelabelan graf itu sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack ditahun 1964. Selanjutnya pelabelan graf mulai dikembangkan oleh Stewart (1966), Kotzig Roza (1967) dan terus berkembang hingga sekarang. Pelabelan dengan domain titik disebut pelabelan titik, pelabelan dengan domain sisi disebut pelabelan sisi, serta pelabelan dengan domain gabungan titik dan sisi disebut pelabelan total. Banyak metode yang dapat digunakan untuk melabeli suatu graf, salah satunya pelabelan harmonis (*harmonious)*.

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Adapun graf yang memiliki pelabelan harmonis juga merupakan

graf harmonis (Graham dan Sloane, 1980). Graf harmonis sendiri terbagi menjadi dua yaitu graf harmonis ganjil dan graf harmonis genap. Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan harmonis ganjil.

Pelabelan harmonis ganjil pertama kali diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Graf $G(p,q)$ dengan p titik dan q sisi disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat f fungsi injektif yang memetakan himpunan titik dari G ke himpunan bilangan bulat tak-negatif $\{0,1,2,\dots,2q-1\}$, sedemikian sehingga akan menghasilkan f^* fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan ganjil $\{1,3,5,\dots,2q-1\}$, dengan aturan setiap sisi mendapat label dari penjumlahan dua label titik yang terkait pada sisi tersebut.

Beberapa penelitian mengenai pelabelan harmonis ganjil telah dilakukan sebelumnya. Penelitian yang telah menemukan graf harmonis ganjil diantaranya Liang dan Bai (2009) membuktikan bahwa graf lingakaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Pada tahun 2011, Vaidya dan Shah membuktikan bahwa graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ termasuk dalam pelabelan harmonis ganjil. Fery Firmansyah (2019) memaparkan bahwa Graf Bunga *Double Quadrilateral* adalah graf harmonis ganjil. Kemudian Diah Ayu Pujiwati (2020) juga membuktikan bahwa Graf Bintang Ganda $(S_{n,m})$ dan Graf $C_m \odot K_{1,n}$ merupakan graf harmonis ganjil. Dementriana Kolo, dkk (2023) juga memaparkan bahwa Graf $C_{m,n} \trianglerighteq_e C_4$ adalah graf harmonis ganjil.

Berdasarkan beberapa penelitian tentang harmonis ganjil (odd harmonious) *tersebut,* dapat diketahui bahwa tidak semua graf bisa dilabeli secara harmonis ganjil. Dari penelitian Liang dan Bai (2019), graf lingkaran yang dapat dilabeli secara harmonis ganjil hanya graf C_n jika dan hanya jika $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Jika C_n adalah graf harmonis ganjil, maka berdasarkan teorema Liang dan Bai (2009), C_n adalah bipartit. Graf C_n adalah bipartit jika dan hanya jika graf C_n tidak memuat lingkaran dengan banyaknya titik ganjil. Dengan demikian n dalah genap. Pada penelitian yang sama yang dilakukan oleh Liang dan Bai juga menunjukkan bahwa graf bintang juga merupakan graf harmonis ganjil. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas tentang pelabelan harmonis ganjil pada hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang dalam bentuk tesis yang diberi judul **"Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Hasil Operasi *Comb* Dari Graf Siklus dan Graf Bintang"**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan label titik pada graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang sehingga memuat pelabelan harmonis ganjil?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya membahas pelabelan harmonis ganjil pada graf hasil operasi *comb* dari graf siklus (C_n) dan graf bintang $(K_{1,m})$ dengan graf C_n dimana n adalah $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ serta titik sentral dari graf bintang $(K_{1,m})$ merupakan titik tetap dari graf $K_{1,m}$ dengan $m \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan label titik pada graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang sehingga memuat pelabelan harmonis ganjil.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1.5.1 Penelitian ini sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu dalam bidang teori graf, khususnya infomasi mengenai pelabelan harmonis ganjil dari graf hasil operasi *comb* pada graf siklus dan graf bintang, sehingga kedepannya dapat digunakan sebagai rujukan untuk peneliti lain dalam penelitian terkait..

1.5.2 Menambah pengetahuan penulis dan pembaca tentang graf khususnya pada pelabelan harmonis ganjil dari graf hasil operasi, yang dalam penelitian ini adalah graf hasil operasi *comb*.

1.6 Kajian Teori

Pada Subbab ini diberikan beberapa definisi dasar dan konsep dasar graf, jenis-jenis graf, operasi *comb* pada graf, serta pelabelan pada graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

1.6.1 Definisi dan Konsep Dasar Graf

Teori graf dikenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yaitu Leonhard Euler. Hasmawati (2020) menjelaskan bahwa teori graf merupakan teori yang menjelaskan mengenai hal diskrit berupa titik dan sisi, yang telah dibuktikan kebenarannya menggunakan sifat-sifat dan aturan tertentu.

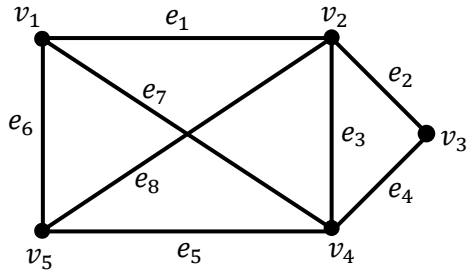
Definisi 1. *Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Graf* G *didefiniskan sebagai pasangan himpunan* $(V(G), E(G))$ *dengan* $V(G)$ *adalah himpunan tak kosong dari unsur yang disebut titik (vertex) dan* $E(G)$ *adalah himpunan dari titik-titik* u, v *di* $V(G)$ *yang disebut sisi (edge). Sisi* $\{u, v\}$ *pada graf* G *akan ditulis* uv (Slamin, 2019).

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas V, suatu himpunan tak kosong titik (*vertices)* dan E, suatu himpunan sisi *(edges*). Tiap sisi memiliki satu atau dua titik yang terhubung dengan sisi tersebut. Titik tersebut disebut titik ujung (*endpoints*). Sisi tersebut juga dikatakan menghubungkan *(connect)* titik ujung tersebut. (Rosen, 2007)

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dapat ditunjukkan dalam bentuk gambar. Anggota himpunan $V(G)$ digambarkan dalam bentuk titik, sedangkan $E(G)$ digambarkan dalam bentuk garis (sisi). Orde pada graf G ditunjukkan dengan simbol p yang menunjukkan banyaknya anggota dari $V(G)$ dan ukuran (*size*) pada graf G ditunjukkan dengan simbol q yang merupakan banyaknya anggota dari $E(G)$. (Hasmawati, 2020). Kardinalitas $V(G)$ ditulis $|V(G)|$ dan kardinalitas $E(G)$ ditulis $|E(G)|$.

Contoh 1.

Diberikan graf G *dengan* $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *dan* $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5, v_1v_4, v_2v_5\}$. *Jika* $v_1v_2 = e_1$, $v_2v_3 = e_2$, $v_2v_4 = e_3$, $v_3v_4 = e_4$, $v_4v_5 = e_5$, $v_3v_5 = e_6$, $v_1v_4 = e_7$, *dan* $v_2v_5 = e_8$, maka G dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 1. Graf G.

Karena graf G memiliki kardinalitas $V(G)$ = 5 dan kardinalitas $E(G) = 8$, sehingga graf G berorde 5 dan berukuran 8.

1.6.2 Terminologi Graf

Beberapa terminologi atau istilah yang sering dipakai dalam teori graf sebagai berikut.

Definisi 2. *Graf sederhana* G *merupakan pasangan* $(V(G), E(G))$*, dengan* $V(G)$ *merupakan himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang mempunyai anggota yang disebut titik (vertex) dan* $E(G)$ *merupakan himpunan pasangan-pasangan tak berurut dan berbeda dari anggota-anggota* $V(G)$ *yang disebut sisi (edge)* (Hasmawati, 2020).

Definisi 3. *Derajat dari suatu titik v pada graf G merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik v. Derajat titik v pada garaf G dinotasikan dengan $deg\,(v)$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimum dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Apabila suatu graf memiliki $\delta(G) = \Delta(G)$, maka graf tersebut disebut graf regular (*Hasmawati, 2020).

Teorema 1. *(Hasmawati, 2023)*

Misalkan G graf sederhana berorde p dan berukuran q. Jumlah derajat titik dalam graf G adalah dua kali banyaknya sisi atau

$$\sum_{n=1}^{p} d(v_n) = 2q$$

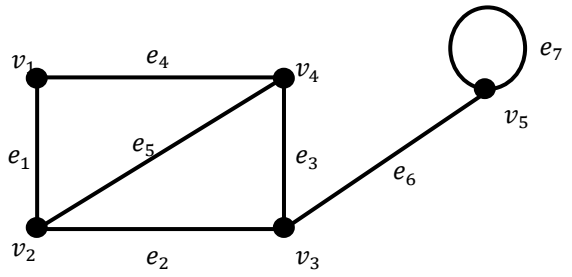
Definisi 4. *Gelung (loop) pada suatu graf merupakan sisi yang mempunyai titik yang terhubung dengan dirinya sendiri. Dengan kata lain, e dikatan loop apabila $e = (vv)$, sehingga derajat dari titik v dihitung sebanyak dua. Apabila dua titik dihubungkan lebih dari satu sisi, maka titik tersebut disebut sisi berganda. Dimana graf yang tidak memiliki gelung dan sisi berganda disebut dengan graf sederhana*.

Definisi 5. *Dua titik u dan v dipada suatu graf G dikatakan **bertetangga (adjacent)** jika terdapat sisi uv menghubungkan kedua titik tersebut, dan titik u dan v terkait **(incident)** pada sisi tersebut. (Wilson, 1996)*

Definisi 6. *Dua sisi a dan b dikatakan bertetangga sisi (**adjacent edges**) jika kedua sisi a dan b memiliki satu titik yang sama pada graf G*. (Wilson, 1996)

Contoh 2.

Diberikan graf H dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_5v_5\}$. Jika $v_1v_2 = e_1$, $v_2v_3 = e_2$, $v_3v_4 = e_3$, $v_1v_4 = e_4$, $v_2v_4 = e_5$, $v_3v_5 = e_6$, dan $v_5v_5 = e_7$, maka G dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2. Graf H.

Berdasarkan definisi terminologi graf diatas, pada graf H memiliki :

a. Derajat setiap titik pada graf H masing-masing $deg(v_1) = 2, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 2, deg(v_4) = 3, deg(v_5) = 2$. Dapat dilihat bahwa pada graf H, $deg(v_1) = deg(v_3) = deg(v_5)$ dan $deg(v_3) = deg(v_4)$, serta diperoleh derajat maksimum pada graf H adalah $\Delta(G) = 3$ dan derajat minimum dari graf H adalah $\delta(H) = 2$.
b. Sisi $e_7 = v_5v_5$ merupakan gelung (*loop)* pada graf H karena titik v_5 terhubung dengan dirinya sendiri.
c. Titik v_1 dan v_2 bertetangga (adjacent), sedangkan titik v_4 dan v_5 tidak bertetangga.
d. Sisi e_5 terkait (*incident)* dengan titik v_2 dan v_4, sedangkan sisi e_5 tidak terkait dengan v_3 dan v_5.
e. Sisi e_1 dan e_2 bertetangga sisi (*adjacent edges*) karena saling terikat dengan satu titik yang sama yaitu titik v_2.

1.6.3 Jenis-jenis Graf

Graf dikelompokkan dalam beberapa jenis, berdasarkan ciri khusus dari masing-masing graf. Beberapa jenis graf akan dipaparkan pada subbab ini, berdasarkan penelitian terdahulu dan graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

1.6.3.1 Graf Kosong dan Graf Trivial

Definisi 7. *Graf yang tidak mempunyai sisi disebut dengan graf kosong sedangkan graf kosong yang hanya memiliki satu titik disebut graf trivial (Munir, 2010). Graf kosong dengan n titik dinotasikan dengan N_n.*

Contoh 3.

Diberikan graf G dengan $\mathrm{V(G)} = \{\mathrm{v}\}$ dan graf H dengan $\mathrm{V(H)} = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$. Karena graf $|\mathrm{V(H)}| = 3$ maka graf G dapat ditulisakan graf N_3. Graf G dan graf H dapat diilustrasikan sebagai berikut.



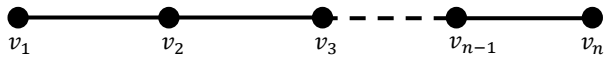
Gambar 3. (a) Graf G; (b) Graf H atau graf N_3.

1.6.3.2 Graf Lintasan

Definisi 8. *Graf Lintasan P_n merupakan graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan orde n. Simpul awal dan akhir graf lintasan P_n masing-masing berderajat 1 dan simpul lainnya berderajat 2. Graf lintasan P_n berukuran $n-1$.*

Contoh 4.

Misalkan graf G dengan $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf G ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. Graf Lintasan P_n.

1.6.3.3 Graf Siklus

Misalkan $P_n = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. Graf yang hanya terdiri atas satu siklus disebut **graf siklus**. (Hasmawati, 2020).

Definisi 9. *Graf Siklus adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf Siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n.* (Robin J. Wilson, 1996)

Contoh 5.

Diberikan graf C_4 dengan $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$, maka graf C_4 dapat digambarkan sebagai berikut.



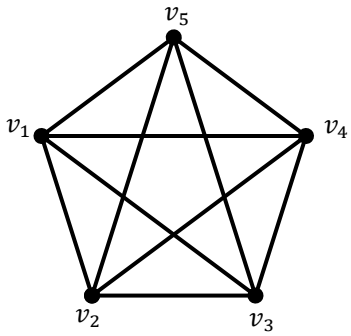
Gambar 5. Graf Siklus C_4.

1.6.3.4 Graf Lengkap

Definisi 10. *Graf Lengkap (Graf Komplit) dengan n titik, dinotasikan dengan K_n adalah graf yang memuat semua sisi yang memungkinkan terkait pada n-titik, dengan kata lain, setiap titik pada graf lengkap adalah bertetangga (Verstraete, 2020). Graf K_n memliki ukuran $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Contoh 6.

Diberikan himpunan titik $\mathrm{V(X)} = \{\mathrm{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}\}$ dan himpunan sisi $\mathrm{E(X)} = \{\mathrm{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5}\}$, maka graf X dapat dinotasikan dengan graf K_5. Graf K_5 dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 6. Graf Komplit K_5.

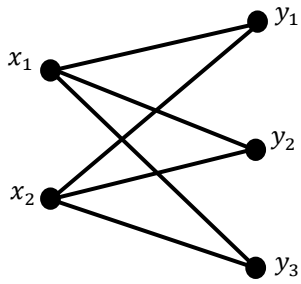
1.6.3.5 Graf Bipartisi

Definisi 11. *Graf G dikatakan graf bipartisi jika himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan titik X dan Y sehingga setiap sisi memiliki satu ujung pada X dan ujung lainnya pada Y. Partisi graf dinotasikan dengan $G[X, Y]$.* (Bondy & Murty, 2008)

Graf bipartisi $G[X, Y]$ dikatakan graf birpartisi lengkap jika setiap titik pada X bertetangga dengan semua titik pada Y. Jika $G[X, Y]$ adalah komplit dengan $|X| = x$ dan $|Y| = y$, maka $G[X, Y]$ dinotasikan dengan $K_{x,y}$. (Balakrishnan & Ranganathan, 2012).

Contoh 7.

Graf $K_{2,3}$ dengan $V(K_{2,3}) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}$ dan $E(K_{2,3}) = \{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3\}$ dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan titik dengan $X = \{x_1, x_2\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, maka graf bipartisi dengan 5 titik ini digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7. Graf Bipartisi Komplit $K_{2,3}$.

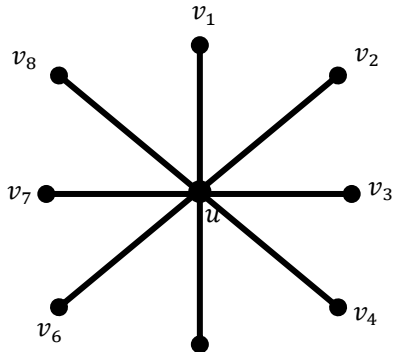
1.6.3.6 Graf Bintang

Definisi 12. *Graf Bintang berorde* n *dinotasikan* S_n *adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat* $n-1$ *dan* $n-1$ *titik berderajat satu. Titik yang berderajat* $n-1$ *disebut titik sentral*. (Hasmawati, 2020)

Graf bintang adalah graf bipartisi komplit $K_{x,y}$ dengan $x = 1$ atau $y = 1$. Dengan demikian, untuk graf bintang dapat pula dinotasikan sebagai $K_{1,y}, y \in Z^+$.

Contoh 8.

Diberikan Graf S_9 dengan $V(S_9) = \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $V(S_9) = \{uv_1, uv_2, uv_3, uv_4, uv_5, uv_6, uv_7, uv_8\}$ dimana titik u merupakan titik sentral pada graf S_9. Graf S_9 dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 8. Graf Bintang S_9 atau $K_{1,8}$.

Pada penelitian ini graf bintang dinotasikan dengan $K_{1,m}$ dengan $m-1$ titik yang berderajat satu dan satu titik berderajat m yang merupakan titik sentral pada graf bintang $K_{1,m}$.

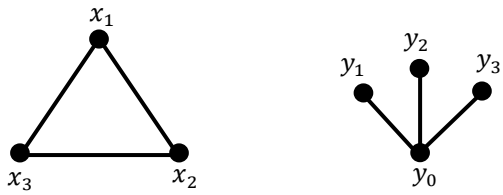
1.6.4 Operasi *Comb* Pada Graf

Definisi 13. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung. Misalkan o adalah titik pada H. Operasi comb dari graf G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$, adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian dari graf G dan $|V(G)|$ kopian dari graf H dan melekatkan kopian ke-i dari graf H pada titik o ke titik ke-i pada graf G*. (Saputro dkk., 2013)

Penentuan titik o dari graf H yang hendak dilekatkan pada titik di graf G dapat dilakukan secara sebarang. Akan tetapi, dengan tujuan khusus, penentuan titik o dari graf H dapat dilakukan secara tetap sehingga disebut titik tetap dari graf H. Graf hasil operasi comb pada graf G dan H tidak tunggal karena berdasar pada titik tetap o yang ditentukan di awal. Hal ini dikarenakan penentuan titik o sebagai titik tetap.

Contoh 9.

Diberikan graf sederhana G dan H dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $E(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_2\}$ serta $V(H) = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ dan $E(H) = \{y_0y_1, y_0y_2, y_0y_3\}$ dimana titik y_0 merupakan titik sentral pada graf H



(a) (b)

Gambar 9. (a) Graf G dan (b) Graf H.

Berdasarkan Definisi 2.3.1, graf $G \rhd H$ artinya graf H diperbanyak sebanyak $|V(G)| = 3$, yaitu H_1, H_2, dan H_3, sehingga

$V(H_1) = \{y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}\}$,

$V(H_2) = \{y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{23}\}$, dan

$V(H_3) = \{y_{30}, y_{31}, y_{32}, y_{33}\}$.

Dengan demikian diperoleh $V(H_i) = \{y_{i0}, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} \mid 1 \leq i \leq 3\}$. Dengan cara yang sama, diperoleh $E(H_i) = \{y_{i0}y_{i1}, y_{i0}y_{i2}, y_{i0}y_{i3} \mid 1 \leq i \leq 3\}$.

Misalkan titik tetap dari graf H adalah $y_0 \in H$, sehingga

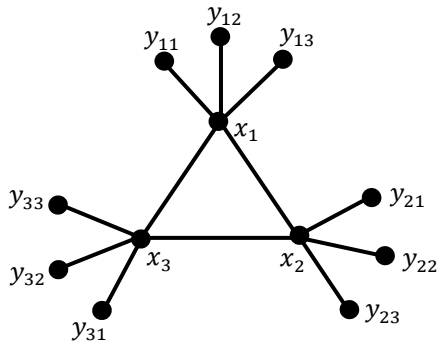
$V(G \rhd H) = V(G) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(H_3)$

dimana $y_{10} = x_1, y_{20} = x_2, y_{30} = x_3$

Serta,

$E(G \rhd H) = E(G) \cup E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3)$

Jadi, graf $G \rhd H$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 10. Graf $G \rhd H$.

Dengan cara yang sama, untuk graf $H \rhd G$ artinya graf G diperbanyak sebanyak $|V(H)| = 4$, yaitu G_1, G_2, G_3 dan G_4, sehingga diperoleh $V(G_i) = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \,|1 \leq i \leq 4\}$ dan $E(G_i) = \{x_{i1}x_{i2}, x_{i2}x_{i3}, x_{i1}x_{i2} \,|1 \leq i \leq 4\}$. Jika $x_1 \in V(G)$ sebagai titik tetap graf G, maka graf $H \rhd G$ diperoleh

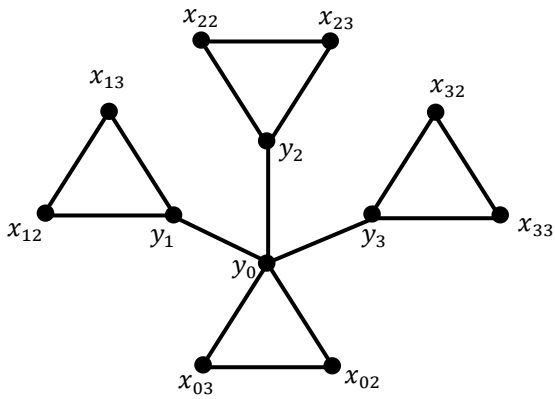
$V(H \rhd G) = V(H) \cup V(G_1) \cup V(G_2) \cup V(G_3)$,

dimana $x_{01} = y_0, x_{11} = y_1, x_{21} = y_2, x_{31} = y_3$

Serta,

$E(H \rhd G) = E(H) \cup E(G_1) \cup E(G_2) \cup E(G_3)$

Graf $H \rhd G$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 11. Graf $H \rhd G$.

Berdasarkan definisi dan dua gambar di atas, gambar 2.7 dan gambar 2.8, dapat diperoleh kesimpulan bahwa operasi ini tidak bersifat komutatif.

1.6.5 Fungsi Injektif dan Bijektif

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai fungsi injektif dan fungsi bijektif yang akan digunakan pada penelitian ini.

Lemma 1. *(Taemnanu, 2022)*

Misalkan $g = Y \to Z$ fungsi dan $|Y| = m, |Z| = n$ berhingga, $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$, jika $|Y| = |R(g)|$, maka g fungsi satu-satu (injektif).

Bukti.

Diketahui $g: Y \to Z$ fungsi.

Misalkan $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, maka $R(g) = \{g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_m)\}$.

Ambil sebarang $u_i, u_j \in Y$ dengan $i \neq j, i \in [1, m], j \in [1, m]$. Menurut premis $|Y| = |R(g)|$. Perhatikan $g(u_i)$ dan $g(u_j)$ dengan $i \neq j$. Akibatnya, $g(u_1) \neq g(u_2) \neq \cdots \neq g(u_m)$. Jadi $g(u_i) \neq g(u_j)$ untuk setiap $i \in [1, m], j \in [1, m]$ dengan $i \neq j$. Jadi, g fungsi injektif.

Dengan demikian, terbukti bahwa g fungsi satu-satu (injektif).■

Lemma 2. *(Taemnanu, 2022)*

Misalkan $g = Y \to Z$ fungsi dan $|Y| = m, |Z| = n$ berhingga, $m, n \in \mathbb{N}$. Jika $|R(g)| = |Y|$ dan $R(g) = Z$, maka g fungsi bijektif.

Bukti.

Suatu fungsi dikatakan fungsi bijektif apablisa fungsi tersebut memenuhi sifat-sifat fungsi injektif dan fungsi surjektif. Oleh karena itu, berikut ditunjukkan fungsi injektif dan fungsi surjektif untuk membuktikan Lemma 2 sebagai berikut.

Diketahui $g: Y \to Z$ fungsi

Misalkan $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, dan $Z = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ berhingga, $m, n \in \mathbb{N}$.

g fungsi satu-satu (injektif)

Misalkan $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, maka $R(g) = \{g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_m)\}$.

Ambil sebarang $u_i, u_j \in Y$ dengan $i \neq j, i \in [1, m], j \in [1, m]$. Menurut premis $|Y| = |R(g)|$. Perhatikan $g(u_i)$ dan $g(u_j)$ dengan $i \neq j$. Akibatnya, $g(u_1) \neq g(u_2) \neq \cdots \neq g(u_m)$. Jadi $g(u_i) \neq g(u_j)$ untuk setiap $i \in [1, m], j \in [1, m]$ dengan $i \neq j$. Jadi, g fungsi injektif.

g fungsi pada (surjektif)

Misalkan $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, dan $Z = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Menurut premis, $R(g) = Z$. Perhatikan bahwa $|R(g)| = m, |Z| = n$. Akibatnya, $m = n$. Ambil sebarang $v \in Z$. Berdasarkan premis, $v \in R(g)$. Sehingga terdapat $u \in Y$ dan $g(u) = v$. Jadi, g fungsi surjektif.

Dengan menikian terbukti bahwa g fungsi bijektif karena telah memenuhi sifat-sifat fungsi injektif dan surjektif. ■

1.6.6 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemberian bilangan bulat pada titik atau sisi, atau keduanya, sesuai dengan kondisi tertentu. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada pertengahan tahun 1960-an. (Gallian, 2023) Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif. Domain pemetaan yang paling sering digunakan adalah semua himpunan titik dan himpuna sisi yang disebut pelabelan total *(total labeling).* Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka pelabelannya sisi. (Wallis, 2001)

Ada beberapa teknik pelabelan telah ditemukan, beberapa diantaranya yaitu Pelabelan *Graceful,* Pelabelan *Magic,* Pelabelan *Anti-magic*, Pelabelan Harmonis, dan masih banyak lagi. (Gallian, 2023) Pada penelitian ini akan membahasan khusus tentang Pelabelan harmonis ganjil, khususnya Pelabelan Harmonis Ganjil.

Pelabelan harmonis diperkenalkan oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Pelabelan harmonis pada graf G adalah suatu fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0,1,\dots,|E(G)|-1\}$ sehingga menginduksi fungsi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1,\dots,|E(G)|-1\}$, didefinisikan dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap sisi $xy \in E(G)$ adalah fungsi bijektif.

Graham dan Sloane memperkenalkan pelabelan harmonis dan beberapa definisi berikut.

Definisi 14. *Sebuah Graf G dikatakan harmonis jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow Z_q$ sehingga menginduksi fungsi $f^*: E(G) \rightarrow Z_q$ didefinisikan dengan $f^*(xy) = \big(f(x) + f(y)\big)(mod\, q)$ adalah fungsi bijektif dan f dikatakan pelabelan harmonis pada graf G.*

Definisi 15. *Sebuah Graf G dikatakan harmonis jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow Z_q$ sehingga menginduksi fungsi $f^*: E(G) \rightarrow Z_q$ didefinisikan dengan $f^*(xy) = (f(x) + f(y))(mod\, q)$ adalah fungsi bijektif dan f dikatakan pelabelan harmonis pada graf G. Jika G adalah graf pohon atau memiliki komponen yang menunjukkan graf pohon, maka tepat satu label akan digunakan pada dua titik dan fungsi pelabelan bukan fungsi injektif.*

Ada dua jenis pelabelan harmonis yaitu pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009 dan pelabelan harmonis genap yang diperkenalkan oleh Sarasija dan Binthiya pada tahun 2011. (Pujiwati, *et. al*. 2021). Pada penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan titik yaitu pelabelan harmonis ganjil (*odd harmonious*).

1.6.5.1 Pelabelan Harmonis Ganjil *(Odd Harmonious)*

Pelabelan harmonis ganjil diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Graf $G(p,q)$ dengan p titik dan q sisi adalah graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif

$$f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,\dots,2q-1\}$$

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif

$$f^* : E(G) \rightarrow \{1,3,5,\dots,2q-1\}$$

dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ akan memiliki bobot berbeda di setiap sisi graf G. Jadi suatu graf G dikatakan graf harmonis ganjil jika setiap titiknya dapat dilakukan pelabelan sesuai aturan pelabelan harmonis ganjil.

Teorema 2. (*Liang dan Bai, 2009)*

1. *Jika G adalah graf harmonis ganjil, maka G ada graf bipartit.*
2. *Jika graf $G(p,q)$ harrmonis ganjil, maka $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q-1$.*

Berikut diberikan contoh pelabelan graf hasil operasi *comb* graf siklus C_4 terhadap graf bintang S_4 dengan titik tetap graf S_4 dilekatkan pada graf C_4.

Contoh 10.

Misalkan $V(C_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E(C_4) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4\}$ serta $V(K_{1,3}) = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ dan $E(K_{1,3}) = \{y_0y_1, y_0y_2, y_0y_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.3.1, graf $G \rhd H$ artinya graf H diperbanyak sebanyak $|V(G)| = 4$.

Misalkan pula $K_{1,3} = H$, dan $y_0 \in H$ adalah titik tetap pada graf H, maka dengan menggunakan Definisi 2.3.1 diperoleh $V(H_i) = \{y_{i0}, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} \mid 1 \le i \le 3\}$ dan $E(H_i) = \{y_{i0}y_{i1}, y_{i0}y_{i2}, y_{i0}y_{i3} \mid 1 \le i \le 3\}$. Berdasarkan pembahasan pada Subbab 2.3, diperoleh graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ sebagai berikut.

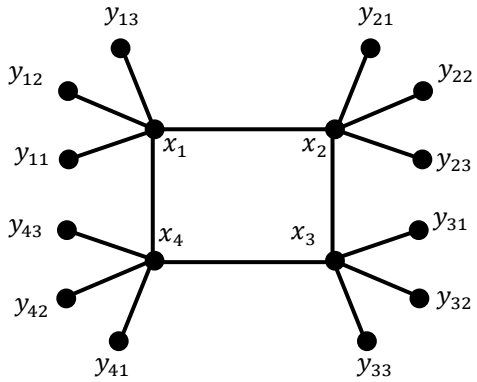
$V(C_4 \rhd K_{1,3}) = V(C_4) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(H_3) \cup V(H_4)$,

dimana $y_{10} = x_1, y_{20} = x_2, y_{30} = x_3, y_{40} = x_4$

serta

$E(C_4 \rhd K_{1,3}) = E(C_4) \cup E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3) \cup E(H_4)$

Berikut adalah gambar dari graf $C_4 \rhd K_{1,3}$



Gambar 12. Graf $C_4 \rhd K_{1,3}$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi pelabelan harmonis ganjil pada subbab 2.4.1 dilakukan pelabelan titik dengan memetakan setiap elemen titik ke himpunan bilangan bulat positif $\{0,1,2,3,\dots,2q-1\}$ yang bersifat injektif, sedemikian sehingga menginduksi pemetaan setiap elemen garis ke bilang bulat positif ganjil $\{1,3,5,7,\dots,2q-1\}$ yang bersifat bijektif, dimana q merupakan banyaknya sisi pada graf, dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)$.

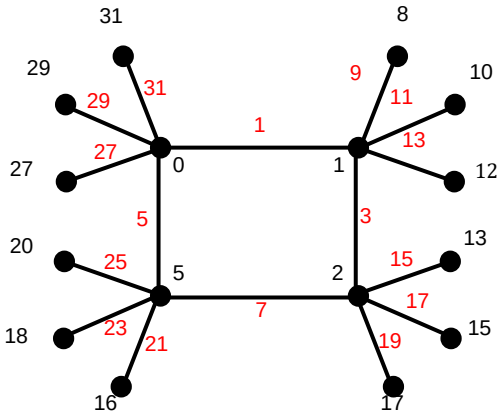
Pada graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ memiliki $q = 16$, maka setiap elemen titik pada graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$. Dengan demikian, label setiap titik dari graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0 & f(y_{22}) &= 10 \\ f(x_2) &= 1 & f(y_{23}) &= 12 \\ f(x_3) &= 2 & f(y_{31}) &= 13 \\ f(x_4) &= 5 & f(y_{32}) &= 15 \\ f(y_{11}) &= 27 & f(y_{33}) &= 17 \\ f(y_{12}) &= 29 & f(y_{41}) &= 16 \\ f(y_{13}) &= 31 & f(y_{42}) &= 18 \\ f(y_{21}) &= 8 & f(y_{43}) &= 20 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bobot setiap elemen garis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f^*(x_1x_2) &= f(x_1) + f(x_2) = 0 + 1 = 1 \\ f^*(x_2x_3) &= f(x_2) + f(x_3) = 1 + 2 = 3 \\ f^*(x_3x_4) &= f(x_3) + f(x_4) = 2 + 5 = 7 \\ f^*(x_1x_4) &= f(x_1) + f(x_4) = 0 + 5 = 5 \\ f^*(x_2y_{21}) &= f(x_2) + f(y_{21}) = 1 + 8 = 9 \\ f^*(x_2y_{22}) &= f(x_2) + f(y_{22}) = 1 + 10 = 11 \\ f^*(x_2y_{23}) &= f(x_2) + f(y_{23}) = 1 + 12 = 13 \\ f^*(x_3y_{31}) &= f(x_3) + f(y_{31}) = 2 + 13 = 15 \\ f^*(x_3y_{32}) &= f(x_3) + f(y_{32}) = 2 + 15 = 17 \\ f^*(x_3y_{33}) &= f(x_3) + f(y_{33}) = 2 + 17 = 19 \\ f^*(x_4y_{41}) &= f(x_4) + f(y_{41}) = 5 + 16 = 21 \\ f^*(x_4y_{42}) &= f(x_4) + f(y_{42}) = 5 + 18 = 23 \\ f^*(x_4y_{43}) &= f(x_4) + f(y_{43}) = 5 + 20 = 25 \\ f^*(x_1y_{11}) &= f(x_1) + f(y_{11}) = 0 + 27 = 27 \\ f^*(x_1y_{12}) &= f(x_1) + f(y_{12}) = 0 + 29 = 29 \\ f^*(x_1y_{13}) &= f(x_1) + f(y_{13}) = 0 + 31 = 31 \end{aligned}$$

Sehingga pelabelan harmonis ganjil pada graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 13. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf $C_4 \rhd K_{1,3}$.

Dapat dilihat bahwa setiap titik pada Graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ memiliki label yang berbeda dan memuat anggota himpunan bilangan bulat positif $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$ serta bobot setiap sisi dari graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ berbeda dan memuat setiap anggota himpunan bilangan bulat ganjil positif $\{1, 3, 5, \dots, 31\}$, sehingga graf $C_4 \rhd K_{1,3}$ memiliki pelabelan harmonis ganjil.

BAB 2
METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode penelitian yang hendak dilakukan dengan tujuan untuk memperoleh hasil penelitian yang akan menjawab rumusan masalah pada penelitian ini. Bab ini terdiri atas jenis, tahapan, beserta diagram alir penelitian.

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah kepustakaan (*library research*) yang dilakukan dengan mengumpulkan referensi-referensi berupa buku, e-book, beserta artikel jurnal yang relevan dengan topik penelitian. Beberapa langkah yang dilakukan dengan cara menelaah, mencermati, dan membandingkan sumber kepustakaan untuk memperoleh informasi.

2.2 Subjek dan Objek Penelitian

Subjek pada penelitian ini yaitu pelabelan harmonis ganjil dari graf hasil operasi *comb*. Sedangkan objek yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu graf hasil operasi *comb* graf siklus C_n terhadap graf bintang $K_{1,m}$.

2.3 Tahapan Penelitian

Pada penelitian ini terdapat beberapa tahapan dalam menentukan pelabelan harmonis ganji dari hasil operasi *comb* pada graf siklus dan graf bintang yaitu sebagai berikut:

1) Mendefinisikan graf hasil operasi *comb* pada graf siklus dan graf bintang.

   Pada tahap ini akan mendefinisikan graf hasil operasi pada graf siklus dan graf bintang dengan menggunakan operasi *comb*.

2) Memberikan label titik dari beberapa graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang.

   Pada tahap ini, setiap label pada graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang akan diberikan label yang berbeda sesuai dengan aturan pelabelan harmonis ganjil.

3) Mempertahankan pola pemberian label titik dari beberapa graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang.

   Pada tahap ini memberi label dengan pola yang sama pada setiap titik dari beberapa graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang.

4) Mendefinisikan fungsi pelabelan harmonis ganji dari graf hasil operasi *comb* pada graf siklus dan graf bintang.

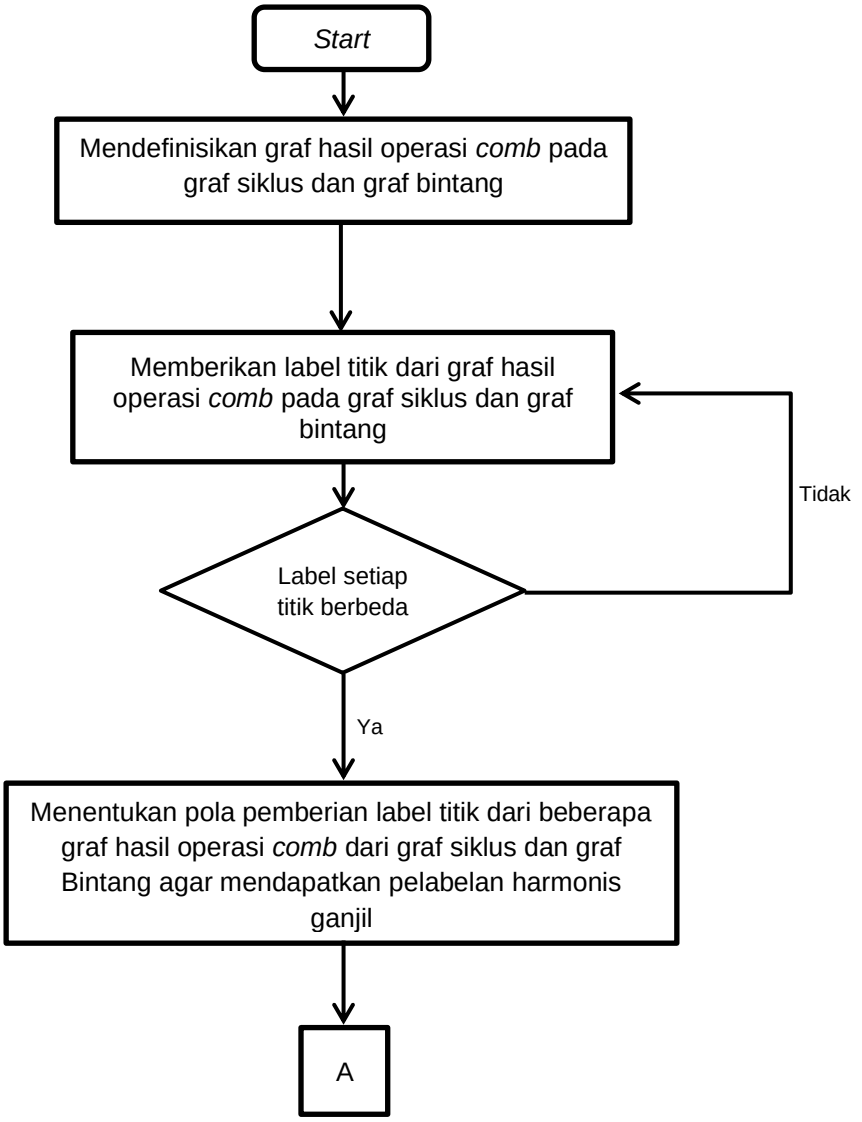
Tahap ini merupakan mendefinisian fungsi pelabelan harmonis ganjil berdasarkan pola pelabelan yang telah dilakukan pada beberapa graf hasil operasi *comb* dari graf siklus dan graf bintang.

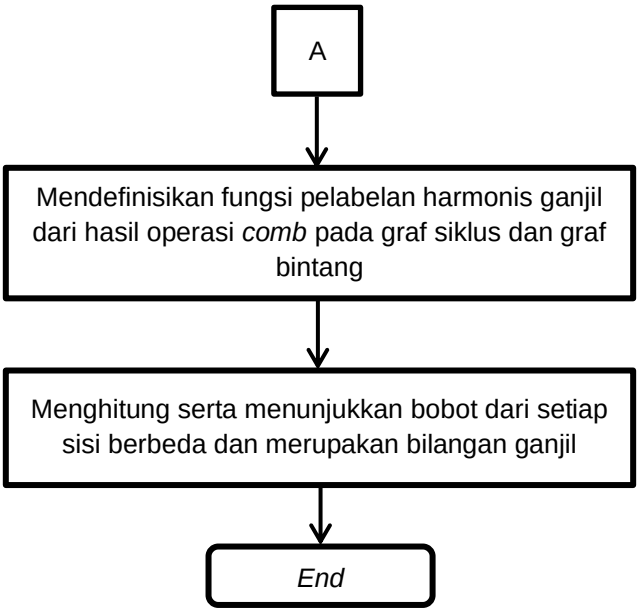
5) Menunjukkan bahwa label setiap titik pada graf hasil operasi *comb* pada graf siklus dan graf bintang berbeda.

Tahap akhir pada tahapan penelitian ini yaitu menunjukkan bahwa label setiap titik pada graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang berbeda dengan dengan menunjukkan bahwa bobot pada setiap sisinya juga berbeda dan merupakan bilangan ganjil.

2.4 Diagram Alir Penelitian

Adapun tahapan pada penelitian ini disajikan dalam bentuk *flowcart* pada Gambar 14 sebagai berikut





Gambar 14. *Flowchart* Prosedur Penelitian.